เมทริกซ์

1. ความหมายของเมทริกซ์

บทนิยาม : **'เมทริกซ์ (Maxtrix)'** คือ การนำเลขจำนวนจริง หรือจำนวนเชิงซ้อนมาเขียนเรียงกันเป็นแถวๆ ภายในวงเล็บเล็ก หรือวงเล็บใหญ่

การบอกตำแหน่งของสมาชิก

$$\begin{array}{c|c}
 & \begin{array}{cccc} & & & \end{array} \\
\text{แถวที่ } 1 \rightarrow & \\
\text{แถวที่ } 2 \rightarrow & \begin{bmatrix} 2 & -3 & 0 & 5 \\ 6 & 10 & 7 & 11 \\ 8 & 6 & 5 & 4 \end{bmatrix} \\
\text{แถวที่ } 3 \rightarrow & \\
 & \begin{array}{cccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \text{หลักที่ } 1 & 2 & 3 & 4 \end{array}
\end{array}$$

มิติและสัญลักษณ์ของเมทริกซ์

เมทริกซ์ที่มี m แถว n หลัก เรียกว่า "m x n เมทริกซ์" และเรียน m x n ว่า "มิติของเมทริกซ์" และมีสมาชิก mn จำนวน

โดยทั่วไปเราสามารถเขียน a_{ij} แทนสมาชิกของเมทริกซ์ในแถวที่ i หลักที่ j

ทรานส์โพสเมทริกซ์

บทนิยาม : ถ้า A เป็น mxn เมทริกซ์แล้ว ทรานส์โพสของ A (transpose of A) เขียนแทนด้วย A^t คือ nxm เมทริกซ์ ที่มีสมาชิกหลักที่ i เหมือนสมาชิกแถวที่ i ของเมทริกซ์ A เมื่อ i = 1, 2, 3, … ,m

ตัวอย่างเช่น $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \rightarrow A^t = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$

$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \rightarrow B^t = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$

การเท่ากันของเมทริกซ์

บทนิยาม : เมทริกซ์ A และ เมทริกซ์ B จะเท่ากันก็ต่อเมื่อ เมทริกซ์มั้งสองมีมิติเท่ากัน และสมาชิกที่อยู่ในตำแหน่งเดียวกัน มีค่าเท่ากัน หรือ $a_{ij}=b_{ij}$ สำหรับทุกค่าของ i และ j

ตัวอย่างเช่น $\begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+1 & 5+1 \\ 2+3 & 3+3 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 19 \end{bmatrix}$

2. การบวกเมทริกซ์

บทนิยาม : กำหนดเมทริกซ์ $A = [a_{ij}]_{mxn}$ และ $B = [b_{ij}]_{mxn}$ จะได้

$$A+B = [a_{ij}+b_{ij}]_{mxn}$$

ตัวอย่างเช่น $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+5 & 2+6 \\ 3+7 & 4+8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{bmatrix}$

เมทริกซ์ศูนย์

เมทริกซ์ศูนย์ คือ เมทริกซ์ที่มีสมาชิกทุกตัวเป็นศูนย์ และสามารถเขียนแทนได้ด้วยสัญลักษณ์ 0 ไม่ว่าเมทริกซ์นั้นจะมีมิติเท่าใด นั่นคือ $0 = [0]_{mxn}$

ตัวอย่างเช่น $[0] = 0$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0$$

สมบัติเกี่ยวกับการบวกของเมทริกซ์

1. **สมบัติปิดของการบวก**

   ถ้า A และ B เป็น "mxn เมทริกซ์" แล้ว A+B เป็น "mxn เมทริกซ์" ดังนั้น การบวกเมทริกซ์มีสมบัติการปิด

2. **สมบติการสลับที่ของการบวก**

   ถ้า A และ B เป็น "mxn เมทริกซ์" แล้ว A+B = B+A ดังนั้น การบวกเมทริกซ์มีสมบัติกาสลับที่ของการบวก

3. **สมบัติการเปลี่ยนกลุ่มได้ของการบวก**

   ถ้า A, B และ C เป็น "mxn เมทริกซ์" แล้ว (A+B)+C = A+(B+C) ดังนั้น การบวกเมทริกซ์มีวมบัติการเปลี่ยนกลุ่มของการบวก

4. **เอกลักษณ์การบวก**

   การบวกเมทริกซ์ มี 0 เป็นเอกลักษณ์การบวกนั่นคือ ถ้า $A=\left[a_{ij}\right]_{mxn}$ และ $0=\left[0\right]_{mxn}$ แล้ว

   $$\boxed{A\pm 0=0+A=A}$$

5. **อินเวอร์สการบวก**

   ถ้า A เป็น "mxn เมทริกซ์" แล้ว –A เป็นอินเวอร์สการบวกของ A ก็ต่อเมื่อ

   $$\boxed{A\pm(-A)=0=(-A)+A}$$

3. การคูณเมทริกซ์ด้วยจำนวนจริง

บทนิยาม : ถ้า $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ และ c เป็นจำนวนจริง แล้ว $cA = [ca_{ij}]_{m \times n}$

ตัวอย่างเช่น $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$

$$2A = \begin{bmatrix} 2(1) & 2(2) & 2(3) \\ 2(4) & 2(5) & 2(6) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 8 & 10 & 12 \end{bmatrix}$$

$$-2A = \begin{bmatrix} -2(1) & -2(2) & -2(3) \\ -2(4) & -2(5) & -2(6) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -4 & -6 \\ -8 & -10 & -12 \end{bmatrix}$$

Ex. กำหนด $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 6 & -2 \end{bmatrix}$ จงหา

1) $2A+3B$

2) $3A-5B$

3) $\frac{1}{2}A+\frac{1}{5}B$

4) $\frac{1}{3}A+\frac{2}{3}B$

4. การคูณเมทริกซ์ด้วยเมทริกซ์

บทนิยาม : ถ้า $A = [a_{ij}]_{mxn}$ และ $B = [b_{ij}]_{nxr}$ ผลคูณ AxB หรือ AB คือ
เมทริกซ์ $C=[c_{ij}]_{mxr}$ โดยที่ $c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\ldots+a_{in}b_{nj}$

ตัวอย่างเช่น

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}4\\5\\6\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}(1x4) + (2x5) + (3x6)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}32\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\4 & 5 & 6\end{bmatrix} x \begin{bmatrix}3\\2\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}(1x3)+(2x2)+(3x1)\\(4x3)+(5x2)+(6x1)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}10\\28\end{bmatrix}$$

เมทริกซ์เอกลักษณ์

บทนิยาม : $I = [a_{ij}]_{mxn}$ เป็นเมทริกซ์เอกลักษณ์ ก็ต่อเมื่อ a_{ij}
เมื่อ $i = j$ และ $a_{ij}=0$ เมื่อ $i \neq j$

ตัวอย่างเช่น $I_2 = \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$ เป็นเมทริกซ์เอกลักษณ์ มิติ 2X3

$I_3 = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}$ เป็นเมทริกซ์เอกลักษณ์ มิติ 3X3

$I_4 = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\0 & 1 & 0 & 0\\0 & 0 & 1 & 0\\0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$ เป็นเมทริกซ์เอกลักษณ์ มิติ 4X4

สมบัติเกี่ยวกับการคูณเมทริกซ์ด้วยเมทริกซ์

1. สมบัติปิดสำหรับการคูณ

ถ้า A และ B เป็น "nxn เมทริกซ์" หรือ "เมทริกซ์จัตุรัส" จะได้ AB และ BA เป็น "nxn เมทริกซ์" นั่นคือ การคูณเมทริกซ์มีสมบัติปิด

ตัวอย่างเช่น A $= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ และ B $= \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$

AB $= \begin{bmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22} \end{bmatrix}$

BA $= \begin{bmatrix} b_{11}a_{11}+b_{12}a_{21} & b_{11}a_{12}+b_{12}a_{22} \\ b_{21}a_{11}+b_{22}a_{21} & b_{21}a_{12}+b_{22}a_{22} \end{bmatrix}$

2. สมบัติการสลับที่ของการคูณ

ถ้า A และ B เป็น "nxn เมทริกซ์" จากตัวอย่างข้างต้นจะพบว่า AB$\neq$BA ดังนั้น การคูณเมทริกซ์ไม่มีสมบัติการสลับที่การคูณ

3. สมบัติการเปลี่ยนกลุ่มได้ของการคูณ

4. เอกลักษณ์สำหรับการคูณ

5. อินเวอร์สการคูณ

อินเวอร์สการคูณของ 2X2 เมทริกซ์

ถ้า A = $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ แล้ว $A^{-1} = \dfrac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

Ex. A = $\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

ในกรณีที่ **ad-bc = 0** จะไม่สามารถหา A^{-1} ได้ เรียนเมทริกซ์ A ซึ่งหา A^{-1} ไม่ได้นี้ว่า "เมทริกซ์เอกฐาน" (Singular Matrix)

ในกรณีที่ **ad-bc** $\neq$ **0** จะไม่สามารถหา A^{-1} ได้ เรียนเมทริกซ์ A ซึ่งหา A^{-1} ได้นี้ว่า "เมทริกซ์ไม่เอกฐาน" (Non-Singular Matrix)

5. **ดีเทอร์มินันต์**

ดีเทอร์มินันต์ของ 2X2 เมทริกซ์

บทนิยาม **:** ถ้า A = $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ และ a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} เป็นจำนวนจริงแล้ว ดีเทอร์มินันต์ของ A คือ $a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}$ และสามารถเขียนแทนได้ด้วยสัญลักษณ์ det(A) หรือ $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$

Ex. A = $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

ดีเทอร์มินันต์ของ nxn เมทริกซ์ เมื่อ n>2 ไมเนอร์

บทนิยาม : กำหนด $A = [a_{ij}]_{nxn}$ โดยที่ $a_{ij} \in R$ และ n เป็นจำนวนเต็มที่มากกว่า 2 **ไมเนอร์ของ a_{ij} ของเมทริกซ์** A คือ ดีเทอร์มินันต์ของเมทริกซ์ที่ได้จากการตัดแถวที่ I และหลักที่ j ของเมทริกซ์ A ออกเขียนแทนไมเนอร์ของ a_{ij} ของเมทริกซ์ A ได้ด้วยสัญลักษณ์ $M_{ij}(A)$

ตัวอย่างเช่น $$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$M_{11}(A) = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}$$

$$M_{12}(A) = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23}$$

โคแฟกเตอร์

บทนิยาม : กำหนด $A = [a_{ij}]_{nxn}$ โดยที่ $a_{ij} \in R$ และ n เป็นจำนวนเต็มที่มากกว่า 2 โคแฟกเตอร์ของ a_{ij} ของเมทริกซ์ A คือผลคูณของ $(-1)^{i+j}$ และ $M_{ij}(A)$ เขียนแทรโคแฟกเตอร์ของ a_{ij} ของเมทริกซ์ A ได้ด้วยสัญลักษณ์ $C_{ij}(A)$

ตัวอย่างเช่น $C_{11}(A) = (-1)^{1+1} M_{11}(A) = M_{11}(A) = a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}$

$C_{12}(A) = (-1)^{1+2} M_{12}(A) = -M_{12}(A) = a_{31}a_{23} - a_{21}a_{33}$

ดีเทอร์มินันท์

บทนิยาม : กำหนด $A = [a_{ij}]_{nxn}$ โดยที่ $a_{ij} \in R$ และ n เป็นจำนวนเต็มที่มากกว่า 2 ดีเทอร์มินันต์ของเมทริกซ์ A คือ $a_{i1}C_{i1}(A) + a_{i2}C_{i2}(A) + a_{i3}C_{i3}(A) + \ldots + a_{in}C_{in}(A)$ เมื่อ i = 1, 2, 3, … , n เขียนแทนดีเทอร์มินันต์ของเมทริกซ์ A ได้ด้วย สัญลักษณ์ det(A) หรือ

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

ทฤษฎีบทเกี่ยวกับดีเทอร์มินันต์ที่ควรทราบ มีดังนี้

กำหนดให้ $A = [a_{ij}]_{nxn}$ โดยที่ $a_{ij} \in R$ และ $n > 2$

$B = [b_{ij}]_{nxn}$ โดยที่ $b_{ij} \in R$ และ $n > 2$

1. $\det(A) = a_{i1}C_{i1}A + a_{i2}C_{i2}(A) + \ldots + a_{in}C_{in}(A)$

2. $\det(A) = a_{ij}C_{ij}A + a_{2j}C_{2j}(A) + \ldots + a_{nj}C_{nj}(A)$

3. ถ้า A มีสมาชิกในแถวใดแถวหนึ่ง หรือหลักใดหลักหนึ่งเป็นศูนย์ทุกตัวแล้ว det(A) = 0 ตัวอย่างเช่น $\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$, $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 \end{vmatrix} = 0$

4. การสลับที่กันระหว่างแถวสองแถวใดๆ หรือหลักสองหลักใดๆ ของ A จะทำให้ได้ดีเทอร์มินันต์ของเมทริกซ์ใหม่ คือ –det(A) ตัวอย่างเช่น

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$$ (สลับแถวที่ 1 กับแถวที่ 2)

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 6 & 5 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$ (สลับแถวที่ 1 กับแถวที่ 3)

5. ถ้า A มีสมาชิกในสองแถวใดหรือสองหลักใด เหมือนกันแล้ว det(A) = 0

ตัวอย่างเช่น $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$, $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0$

6. ถ้าคูณสมาชิกทุกตัวในแถวใดแถวหนึ่ง หรือหลักใดหลักหนึ่งของ A ด้วยจำนวนจริง c แล้ว ดีเทอร์มินันต์ของเมทริกซ์ใหม่ คือ c det(A)

7. ถ้าเปลี่ยนแถวใดแถวหนึ่ง (หรือหลักใดหลักหนึ่ง) ของ A โดยใช้จำนวนจริงที่ไม่เท่ากับศูนย์ คูณกับสมาชิกทุกตัวในแถวใดแถวหนึ่ง (หรือหลักใดหลักหนึ่ง) ของ A แล้วนำไปบวกกับสมาชิกใหม่ (หรือหลัก) ที่ต้องการเปลี่ยนนั้นโดยบวกสมาชิกในลำดับเดียวกันเข้าด้วยกันแล้วใช้ผลบวกแทนที่สมาชิกเดิม ดีเทอร์มินันต์ของเมทริกซ์ใหม่จะเท่ากับ det(A)
8. $\det(A^t) = \det(A)$
9. $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$
10. $\det(cA) = c^n\det(A)$ เมื่อ c เป็นจำนวนจริงใดๆ
11. $\det(AB) = \det(a) \cdot \det(B)$

6. การหาอินเวอร์สการคูณของเมทริกซ์

เมทริกซ์เอกฐาน

บทนิยาม : ถ้า $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ เมื่อ $a_{ij} \in R$ และ n เป็นจำนวนเต็มที่มากกว่า 1 แล้ว
A เป็นเมทริกซ์เอกฐาน ก็ต่อเมื่อ $\det(A) = 0$
A เป็นเมทริกซ์ไม่เอกฐาน ก็ต่อเมื่อ $\det(A) \neq 0$

เมทริกซ์ผูกพัน

บทนิยาม : ถ้า $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ เมื่อ $a_{ij} \in R$ และ n เป็นจำนวนเต็มที่มากกว่า 1 แล้ว
เมทริกซ์ผูกพัน (adjoint matrix) ของ A คือทรานสโพสของเมทริกซ์
$[C_{ij}(A)]_{n \times n}$ และสามารถเขียนแทนได้ด้วยสัญลักษณ์ adj A

ตัวอย่างเช่น $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 3 & -1 \\ -3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

$$\because \quad \text{adj } A = \begin{bmatrix} C_{11}(A) & C_{12}(A) & C_{13}(A) \\ C_{21}(A) & C_{22}(A) & C_{23}(A) \\ C_{31}(A) & C_{32}(A) & C_{33}(A) \end{bmatrix}^t$$

อินเวอร์สการคูณของเมทริกซ์

บทนิยาม : ถ้า $A = [a_{ij}]_{nxn}$ เมื่อ $a_{ij} \in R$ และ n เป็นจำนวนเต็มที่มากกว่า 1 แล้ว

1. $A(adj\ A) = (agj\ A)A = det(A)\ I_n$
2. ถ้า $det(A) \neq 0$ แล้ว $A^{-1} = \frac{1}{det(A)} adj\ A$

Ex. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 3 & -1 \\ -3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

7. การใช้เมทริกซ์แก้ระบบสมการเชิงเส้น

ระบบสมการเชิงเส้น

บทนิยาม : ระบบสมการเชิงเส้น หมายถึง ชุดสมการที่ทุกสมการเป็นสมการเชิงเส้น และจำนวนสมการในระบบเท่ากับจำนวนตัวแปร

$$\begin{array}{ccc}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots a_{1n}x_n & = & b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots a_{2n}x_n & = & b_2 \\
. \quad . \quad . & & . \\
. \quad . \quad . & & . \\
. \quad . \quad . & & . \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots a_{nn}x_n & = & b_n
\end{array}$$

และสามารถเขียนเป็นสมการเมทริกซ์ได้ ดังนี้

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}}_{A} \times \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}}_{X} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

A x X = B หรือ AX = B

Ex.

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 5 \\ x + y &= 2 \end{aligned}$$

เขียนระบบสมการเป็นรูปเมทริกซ์ได้ดังนี้

กฎของคราเมอร์

จากสมการ $a_1x+ b_1y=c_1$

$a_2x+ b_2y=c_2$

ให้ $\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}=a_1b_2-a_2b_1$

ให้ $\Delta x=\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}=c_1b_2-c_2b_1$

ให้ $\Delta y=\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}=a_1c_2-a_2c_1$

จะได้ $x=\dfrac{\Delta x}{\Delta}$

$y=\dfrac{\Delta y}{\Delta}$

Ex. จงแก้สมการ $2x + y = 1$

$3x - 2y = 4$