เซต

1. เซต (set)

1.1 ความหมายของเซต

"เซต" เป็นคำที่ใช้แทนการกล่าวถึง 'กลุ่ม' ของสิ่งต่างๆ ซึ่งถ้าจะเปรียบเทียบกับคำที่ใช้ในการพูด การเขียน คือ คำว่า ฝูง หมู่ กลุ่ม คณะ ฯลฯ

ในการกล่าวถึงเซตจะใช้กับการกล่าวถึงกลุ่มที่สามารถบอกได้ว่าสิ่งใดเป็นหรือไม่เป็นสมาชิกของเซตที่กำหนดให้ เช่น

- เซตของจำนวนเต็มบอกหนึ่งถึงสิบ
- เซตของพยัญชนะในภาษาไทย

1.2 สัญลักษณ์ที่ใช้แทนเซตและวิธีเขียนเซต

โดยทั่วไปจะใช้ วงเล็บปีกกา { } เป็นสัญลักษณ์แทนเซต เช่น $A = \{a, b, c\}$ หมายถึง A เป็นเซตที่มีสมาชิก 3 ตัว คือ a, b, c และสัญลักษณ์ $\in$ แทนคำว่า เป็นสมาชิกของเซต และ $\notin$ แทนคำว่า ไม่เป็นสมาชิกของเซต

ดังนั้น จะเห็นได้ว่า $a \in A$, $b \in A$, $c \in A$ และ $d \notin A$ เป็นต้น

วิธีการเขียนเซตมี 2 วิธี คือ

1. การเขียนเซตแบบแจกแจงสมาชิก โดยเขียนสมาชิกทุกตัวของเซตไว้ในเครื่องหมายวงเล็บปีกกาและใช้เครื่องหมายจุลภาค (,) คั่นระหว่างสมาชิกแต่ละตัว เช่น

   A เป็นเซตของจำนวนเต็มบวกหนึ่งถึงสิบ เขียนแทนด้วย

   $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

   B เป็นสมาชิกของพยัญชนะในภาษาไทย เขียนแทนด้วย

   B= {ก, ข, ฃ, ค, ฅ, ..., ฮ}

2. การเขียนเซตแบบบอกเงื่อนไขของสมาชิกในเซต ใช้วิธีบรรยายลักษณะสมาชิกในเซต โดยเขียนตัวแปรแทนสมาชิกของเซตไว้ภายในวงเล็บปีกกา เช่น

A เป็นสมาชิกของจำนวนนับ เขียนแทนด้วย

$A = \{x| \ x$ เป็นจำนวนนับ$\}$

อ่านว่า A เป็นเซตที่ประกอบด้วยสมาชิก x โดยที่ x เป็นจำนวนนับ

B เป็นเซตของจำนวนจริงที่สอดคล้องกับสมการ $x^2 + 3x - 4 = 0$ เขียนแทนด้วย

$B = \{x \in R \mid x^2 + 3x - 4 = 0\}$

<u>ข้อตกลง</u> จะใช้สัญลักษณ์ต่อไปนี้แทนเซตต่างๆ ดังนี้

I แทน เซตของจำนวนเต็ม $\ldots,-2,-1, 0, 1, 2,\ldots$

I^+, N แทน เซตของจำนวนเต็มบวก, จำนวนนับ 1,2,3,4

I^- แทน เซตของจำนวนเต็มลบ $\ldots,-3,-2,-1$

Q แทน เซตของจำนวนตรรกยะ 0.5, 10.5

R แทน เซตของจำนวนจริง

R^+ แทน เซตของจำนวนจริงบวก

R^- แทน เซตของจำนวนจริงลบ

C แทนเซตของจำนวนเชิงซ้อน

Ex 1.1 จงเขียนเซตต่อไปนี้แบบแจกแจงสมาชิก

1) $A = \{x \in I \mid 5 < x \leq 10\}$

2) $B = \{x \in I \mid x^2 - 9 = 0\}$

Sol

Ex 1.2 จงเขียนเซตต่อไปนี้แบบบอกเงื่อนไข

1) A เป็นเซตของจำนวนจริงที่อยู่ระหว่าง 2 และ 5

2) $B = \{2, 4, 6, 8, \ldots\}$

Sol

นิยาม 1.1 เรียกเซตที่ไม่มีสมาชิกว่า เซตว่าง เขียนแทนด้วย $\emptyset$ หรือ { }

Ex 1.3 ให้ $A = \{x \in I^- \mid x > 1\}$

นิยาม 1.2 เอกภพสัมพัทธ์ หมายถึง เซตที่กำหนดขึ้นโดยมีข้อตกลงว่า จะไม่กล่าวถึงสิ่งใดนอกเหนือจากสมาชิกของเซตที่กำหนดขึ้นนี้ เซตของเอกภพสัมพัทธ์ใช้สัญลักษณ์ U

นิยามที่ 1.3 เซตจำกัด (Finite set) คือ เซตว่างหรือเซตที่มีจำนวนสมาชิกจำกัด และเรียกเซตที่ไม่เป็นเซตจำกัดว่า เซตอนันต์ (Infinite set)

Ex 1.4 จงพิจารณาว่าเซตต่อไปนี้เป็นเซตจำกัดหรือเซตอนันต์

1) $A = \{x \in I^+ \mid x < 10\}$

2) $B = \{x \in R \mid x < 10\}$

3) $C = \{x \mid x^2 - 3x - 18 = 0\}$

Sol

1.3 การเท่ากันของเซต

นิยาม 1.4 เซต A และ เซต B จะเท่ากันก็ต่อเมื่อ สมาชิกทุกตัวของเซต A เป็นสมาชิกของเซต B และสมาชิกทุกตัวของเซต B เป็นสมาชิกของเซต A เขียนแทนด้วย $A=B$ และใช้สัญลักษณ์ $A\neq B$ แทนเซต A ไม่เท่ากับ B

นิยาม 1.5 เซต A เทียบเท่ากับเซต B ก็ต่อเมื่อ A และ B มีจำนวนสมาชิกเท่ากัน

Ex 1.5 $A = \{6, -3\}$

$B = \{x \in I \mid x^2 - 3x - 18 = 0\}$

$A = B$ หรือไม่

Sol

Ex 1.6 $A = \{x \in I^+ \mid x \leq 8\}$ $B = \{x \in I \mid -3<x\leq 5\}$

A เทียบเท่า B หรือไม่

Sol

2. สับเซต

นิยาม 2.1 เซต A เป็นสับเซตของเซต B ก็ต่อเมื่อ สมาชิกทุกตัวของเซต A เป็นสมาชิกของเซต B เขียนแทนด้วย $A \subset B$ และใช้สัญลักษณ์ $A \not\subset B$ แทนเซต A ไม่เป็นสับเซตของเซต B

ข้อสังเกต

1. ถ้ามีสมาชิกใน A อย่างน้อย 1 ตัว ไม่เป็นสมาชิกของ B A จะไม่เป็นสับเซตของ B
2. เซตทุกเซตเป็นสับเซตของตัวเอง นั่นคือ ถ้า A เป็นเซตใดๆ แล้ว $A \subset A$
3. เซตว่างเป็นสับเซตของทุกเซต นั่นคือ ถ้า A เป็นเซตใดๆ แล้ว $\emptyset \subset A$
4. สำหรับเซต A และ B ใดๆ $A = B$ ก็ต่อเมื่อ $A \subset B$ และ $B \subset A$
5. เซต A เป็นสับเซตแท้ของเซต B ก็ต่อเมื่อ $A \subset B$ และ $A \neq B$

Ex 2.1 จงหาสับเซตทั้งหมดของเซต $A = \{1,2,3\}$

Sol

นิยาม 1.2.2 ถ้า A เป็นเซตใดๆ เซตที่มีสมาชิกเป็นสับเซตทั้งหมดของเซต A จะเรียกว่า เพาเวอร์เซตของเซต A เขียนแทนด้วย $P(A)$

Ex 2.2 จงหาเพาเวอร์เซตของเซต $A = \{a,b\}$

Sol

ข้อสังเกต

1. ถ้า A เป็นเซตจำกัดที่มีสมาชิก n ตัว แล้ว P(A) จะมีสมาชิก 2^n ตัว
2. ถ้า A เป็นเซตใด ๆ แล้ว $A \in P(A)$
3. ถ้า A เป็นเซตใดๆ แล้ว $\emptyset \in P(A)$

<u>Ex 2.3</u> ให้ $S=\{2,3\}$ จงหา P(S) และ n(P(S))

<u>Sol</u>

<u>Ex 2.4</u> ให้ $A= \{1, \{1\},2\}$

$B= \{1, 2\}$

$C= \{\{1\}, \{2\}\}$

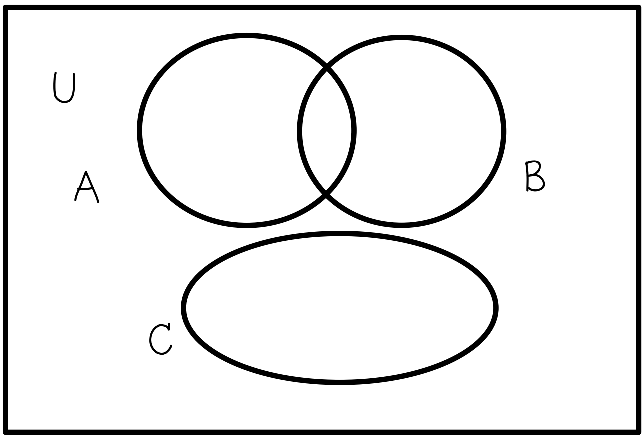
จงพิจารณาว่าต่อไปนี้ ข้อใดถูก ข้อใดผิด

1. $A=B$
2. $B \subset A$
3. $B \not\subset C$

Sol

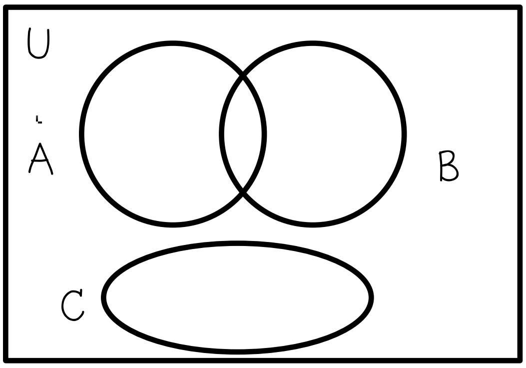
3. แผนภาพเวนน์-ออยเลอร์ (Vann-Euler diagrams)

เพื่อที่จะเป็นการง่ายต่อการทำความเข้าใจเกี่ยวกับเรื่องเซต ได้มีนักคณิตศาสตร์ 2 ท่าน คือ จอนเวนน์ กับเลโอนาร์ด ออยเลอร์ ได้คัดแผนภาพเพื่อแสดงเรื่องราวที่เกี่ยวกับเซต ซึ่งต่อมาเรียกกันสั้นๆ ว่าแผนภาพเวนน์-ออยเลอร์ โดยเขียนรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าแทนเซตเอกภพสัมพัทธ์และวงกลม วงรี หรือรูปพื้นที่จำกัดแทนเซต ดังรูป



จากรูป แสดงว่า เซต A, B และ C ต่างก็เป็นสับเซตของ U และเซต A กับเซต B มีสมาชิกร่วมกันอยู่บางตัว

<u>Ex 3.1</u>



A= {1,2,3} B= {1,4,5} C= {6,7}

4. การดำเนินการของเซต

4.1 การยูเนียน (Union)

นิยาม 1.3.1 ให้เซต A, B เป็นเซตใดๆ เซต A ยูเนียนกับเซต B คือเซตที่ประกอบด้วยสมาชิกของเซต A หรือ เซต B เขียนแทนด้วย $A\cup B$

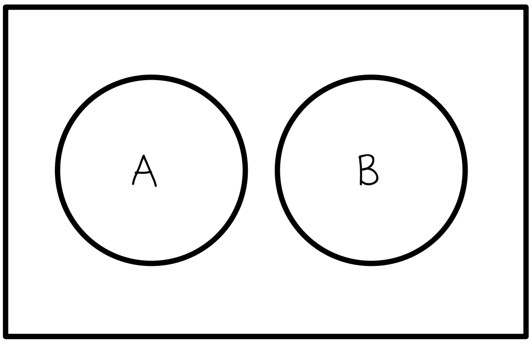
ดังนั้น $A\cup B = \{x \in U \mid x \in A$ หรือ $x \in B\}$

Ex 4.1 ให้ $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ และ $B = \{4, 5, 6, 7\}$ จงหา $A\cup B$

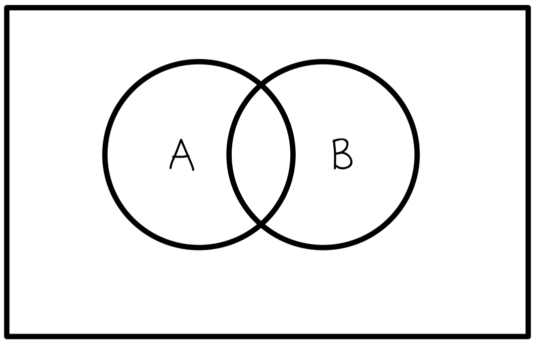
$A\cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

ข้อสังเกต

1. สมาชิกทุกตัวของ A และสมาชิกทุกตัวของ B เป็นสมาชิกของ $A\cup B$
2. สามารถแสดงเซต A ยูเนียนกับเซต B โดยใช้แผนภาพเวนน์-ออยเลอร์ ได้ดังนี้



A และ B ไม่มีสมาชิกร่วมกันเลย



A และ B มีสมาชิกร่วมกันบางส่วน

คุณสมบัติของยูเนี่ยน

กำหนด A,B เป็นเซตใดๆ

1. $A \cup A = A$
2. $A \cup U = U$
3. $A \cup \phi = A$
4. $A \cup B = B \cup A$
5. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
6. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
7. $A \cup A' = U$
8. $(A \cup B)' = A' \cap B'$
9. $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$

4.2 การอินเตอร์เซกชัน (Intersection)

นิยาม 1.3.2 ให้เซต A,B เป็นเซตใดๆ เซต A อินเตอร์เซกชันกับเซต B คือเซตที่ประกอบด้วยสมาชิกซึ่งเป็นสมาชิกของทั้งเซต A และเซต B เขียนแทนด้วย $A \cap B$

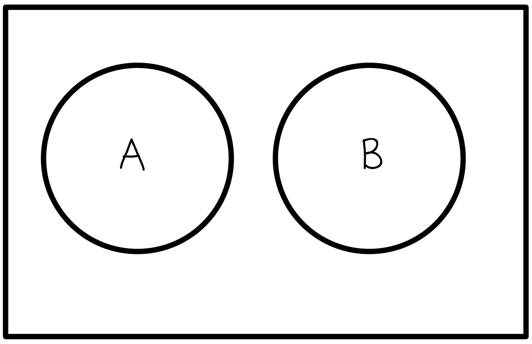
ดังนั้น $A \cap B = \{x \in U \mid x \in A$ และ $x \in B\}$

Ex 4.2 ให้ $A = \{a, b, c, d\}$ และ $B = \{1, 2, 3, a, b\}$ จงหา $A \cap B$

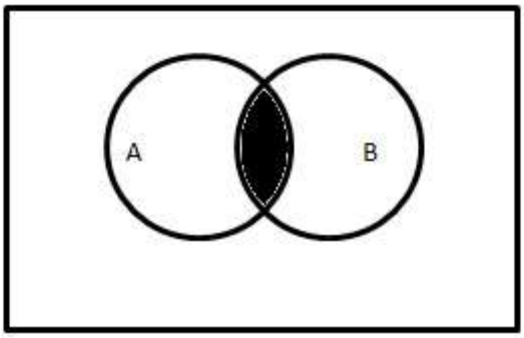
$A \cap B = \{a, b\}$

ข้อสังเกต

1. สมาชิกทุกตัวของ $A \cap B$ จะต้องเป็นสมาชิกของ A และเป็นสมาชิกของ B ด้วย
2. สามารถแสดงเซต A อินเตอร์เซกชันกับเซต B โดยใช้แผนภาพเวนน์-ออยเลอร์ ได้ดังนี้



A และ B ไม่มีสมาชิกร่วมกันเลย



A และ B มีสมาชิกร่วมกันบางส่วน

คุณสมบัติของอินเตอร์เซ็กชัน

กำหนด A,B เป็นเซตใดๆ

1. $A \cap A = A$
2. $A \cap U = A$
3. $A \cap \phi = \phi$
4. $A \cap B = B \cap A$
5. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
6. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
7. $A \cap A' = \phi$
8. $(A \cap B)' = A' \cup B'$
9. $A-(B \cap C) = (A-B) \cup (A-C)$

4.3 คอมพลีเมนต์ (Complement)

นิยาม 4.3 สำหรับเซต A ซึ่งเป็นสับเซตของเซตเอกภาพสัมพัทธ์ U คอมพลีเมนต์ของเซต A คือเซตที่ประกอบด้วยสมาชิกของ U แต่ไม่เป็นสมาชิกของเซต A เขียนแทนด้วย A', A^c

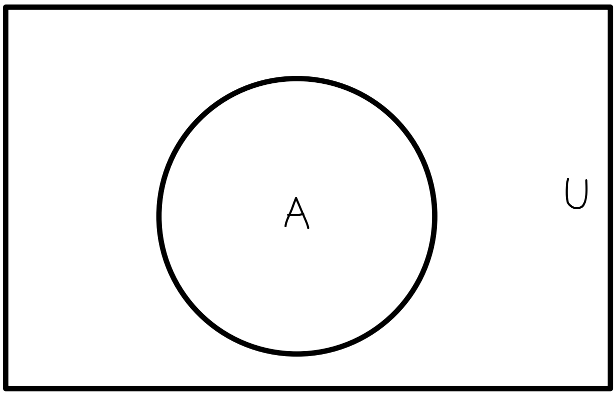
ดังนั้น $A' = \{x \in U \mid x \notin A\}$

<u>Ex 4.3</u> ให้ U= {1,2,3,4,5} A={1,2,3} จงหา A'

$A' = \{4,5\}$

ข้อสังเกต

1. สามารถแสดง A' โดยใช้แผนภาพเวนน์-ออยเลอร์ ได้ดังนี้



คุณสมบัติของคอมพลีเมนต์

1. $(A')'=A$
2. $\phi'=U$
3. $U'=\phi$
4. $A\cup A'=U$
5. $A\cap A'=\phi$
6. $A\subset B$ ต่อเมื่อ $B'\subset A'$
7. $A\cap B=\phi$ ต่อเมื่อ $A'\subset B'$

4.4 ผลต่างระหว่างเซต (difference)

นิยาม 4.4 ให้เซต A,B เป็นเซตใดๆ ผลต่างของ A และ B คือ เซตที่ประกอบด้วยสมาชิกของเซต A แต่ไม่ได้เป็นสมาชิกของเซต B เขียนแทนด้วย $A-B$

ดังนั้น $A-B=\{x|\ x\in A$ และ $x\notin B\}$

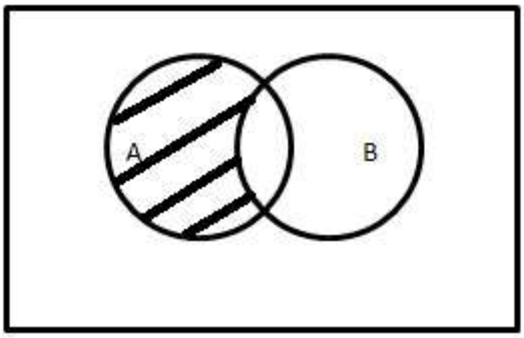
<u>Ex 4.4</u> ให้ $A=\{1,2,3,4,5\}$ $B=\{2,4,5\}$ จงหา $A-B$ และ $B-A$

$A-B=\{1,3\}$

$B-A=\phi$

ข้อสังเกต

1. $A-B=A\cap B'$
2. สามารถแสดงเซต $A-B$ โดยใช้แผนภาพเวนน์-ออยเลอร์ ได้ดังนี้



Ex 4.5 ถ้า $U=\{1,2,3,\ldots,10\}$, $A=\{1,2,3,4\}$, $B=\{3,4,5,8,10\}$, $C=\{3,5\}$ จงเขียนเซตต่างๆ ต่อไปนี้

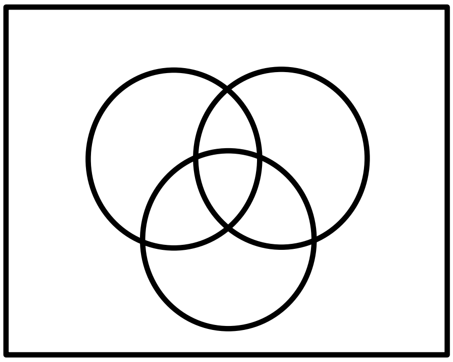
1. $(A\cup B)\cap C$
   เนื่องจาก $A\cup B=\{1,2,3,4,5,8,10\}$
   ดังนั้น $(A\cup B)\cap C=\{3,5\}$
2. $A-(B\cap C)$
   เนื่องจาก $B\cap C=\{3,5\}$
   ดังนั้น $A-(B\cap C)=\{1,2,4\}$
3. $(A-B)\cup C$
   เนื่องจาก $A-B=\{1,2\}$
   ดังนั้น $(A-B)\cup C=\{1,2,3,5\}$

คุณสมบัติของผลต่างระหว่างเซต

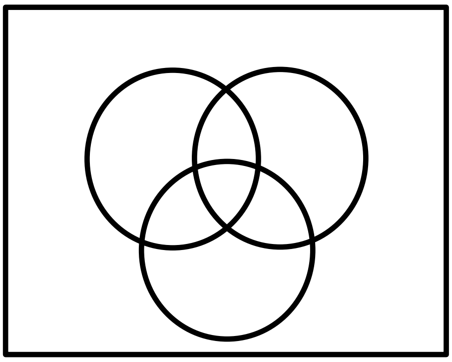
1. $A-A=\phi$
2. $A-\phi=A$
3. $\phi-A=\phi$
4. $A-A'=A$
5. $A-U=\phi$
6. $A-B\subset A$
7. $A-B=A$ ต่อเมื่อ $A\cap B=\phi$
8. $A-B=\phi$ ต่อเมื่อ $A\subset B$

Ex **4.6** จงเขียนภาพเวนน์-ออยเลอร์ และแรเงาส่วนที่แทนเซตต่างๆ เหล่านี้

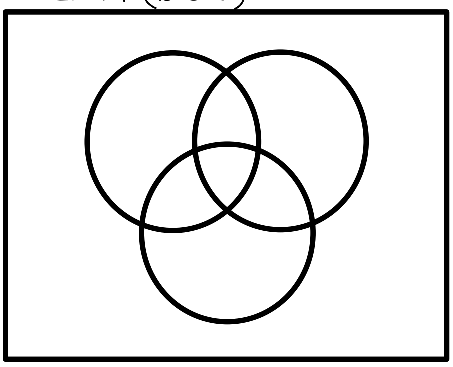
1. $A\cap(B\cup C)$



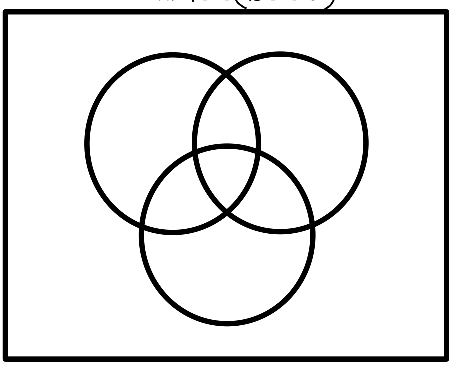
2. $A\cup(B\cap C)$



2. $A-(B\cup C)$



4.$A'\cap(B\cap C)$



4.5 คุณสมบัติที่สำคัญบางประการของการกระทำของเซต

ให้ A, B และ C เป็นเซตใดๆ ที่เป็นสับเซตของ U

1. ถ้า $A \subset B$ และ $B \subset C$ แล้ว $A \subset C$
2. ถ้า A,B เป็นเซตจำกัด และ $A \subset B$ แล้ว $n(A) \leq n(B)$
3. $A \cup A = A$

   $A \cap A = A$
4. $A \cap \phi = \phi$

   $A \cup \phi = A$
5. $A \cap U = A$

   $A \cap U = U$
6. $A \cap B = B \cap A$

   $A \cup B = B \cup A$
7. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

   $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ (สลับวงเล็บได้ เมื่อเครื่องหมายเหมือนกัน)
8. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

   $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (เครื่องหมายไม่เหมือนกัน เปลี่ยนวงเล็บไม่ได้)
9. $(A \cup B)' = A' \cap B'$ (union เจอ complement เป็น intersection)

   $(A \cap B)' = A' \cup B'$ (intersection เจอ complement เป็น union)
10. $(A')' = A$
11. $\phi' = U$ (ไม่เอาเซตว่าง ก็เลยเป็นเอาทั้งหมด)
12. $A \cap A' = \phi$

    $A \cup A' = U$

13. $n(A\cup B) = n(A) + n(B)$ เมื่อ $A\cap B=\Phi$

14. $n(A\cup B) = n(A) + n(B) - n(A\cap B)$

15. $n(A\cup B\cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A\cap B) - n(A\cap C) - n(B\cap C) + n(A\cap B\cap C)$