

เลขยกกำลัง, พังค์ชันเอกซ์โปเนนเชียลและพังค์ชันลอการิทึมเลขยกกำลังและจำนวนติดกรณฑ์

- นิยาม 1) ถ้า $a > 0$ แล้ว $\sqrt[n]{a}$ หมายถึงรากที่ n ของ a ที่เป็นจำนวนจริงบวก
- 2) ถ้า $a < 0$ แล้ว n เป็นจำนวนคี่แล้ว $\sqrt[n]{a}$ หมายถึง รากที่ n ของ a ที่เป็นจำนวนลบ
- 3) ถ้า $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{I}^+$, และ $\sqrt[n]{a} \in \mathbb{R}$ แล้ว

$$3.1) \sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$$

$$3.2) (\sqrt[n]{a})^m = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m = a^{\frac{m}{n}}$$

ทฤษฎีบท กำหนด $a, b \in \mathbb{R}$ และ m, n เป็นจำนวนเต็มแล้ว

$$1) a^m a^n = a^{m+n}$$

$$2) \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}, a \neq 0$$

$$3) (a^m)^n = a^{mn}$$

$$4) (a \cdot b)^m = a^m b^m$$

$$5) \left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}, b \neq 0$$

$$6) a^{-n} = \frac{1}{a^n}, a \neq 0$$

$$7) \sqrt[n]{a^n} = a \text{ เมื่อ } n \text{ เป็นจำนวนเต็มคี่}$$

$$\sqrt[n]{a^n} = |a| \text{ เมื่อ } n \text{ เป็นจำนวนเต็มคู่}$$

$$8) \sqrt[n]{a^n} \cdot \sqrt[n]{b^n} = \sqrt[n]{a \cdot b}$$

$$9) \frac{\sqrt[n]{a^n}}{\sqrt[n]{b^n}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

1. เลขยกกำลัง

Ex 1.1 จงทำให้เป็นผลสำเร็จ (มีเลขชี้กำลังเป็นบวก)

1)
$$\left(\frac{3^2 a^{-5} b^{-2} c^{-5}}{3^{-4} a^{-3} b^{-2} c^{-3}} \right)^3$$

2)
$$\left(a^{-2} - b^{-2} \right) + \left(a^{-1} + b^{-1} \right)$$

Ex 1.2 จงแยกตัวประกอบ

1) $a^{-3}-8b^{-3}$

2) $a^{-4}-b^{-4}$

3) $12a^{-2}-5a^{-1}b^{-1}-2b^{-2}$

4) $x^{-3}-3x^{-2}-4x^{-1}+12$

2. รากที่ n ในระบบจำนวนจริงและจำนวนจริงในรูปกรณฑ์

➤ การขจัดพจน์หารกรณฑ์

Ex 2.1 จงหาค่าของ $\sqrt{18} + \sqrt{162} - \sqrt{50}$

$$\text{Ex 2.2 } \sqrt[3]{250} - 4\sqrt[3]{-686} + 6\sqrt[3]{16}$$

➤ คอญูเกต (Conjugate) คอญูเกตของ $\sqrt{a} - \sqrt{b}$ คือ $\sqrt{a} + \sqrt{b}$

Ex 2.3 จงทำส่วนให้ได้ติดกรณฑ์

$$1) \frac{1}{\sqrt{5} + \sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{5} - \sqrt{3}}{\sqrt{5} - \sqrt{3}}$$

$$2) \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{\sqrt{6} + \sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{\sqrt{6} - \sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{6})^2 - 2\sqrt{2}\sqrt{6} + (\sqrt{2})^2}{(\sqrt{6})^2 - (\sqrt{2})^2}$$

➤ การหารากที่ 2 ของจำนวนที่ติดกัน

วิธีการหารากที่ 2 ของ $a \pm 2b$ ก็คือ การทำให้ $a \pm 2b$ อยู่ในรูปกำลังสองสมบูรณ์

Ex 2.4 จงหารากที่สองของ

1) $15+2\sqrt{44}$

2) $20-\sqrt{384}$

3) $\sqrt{128}-\sqrt{120}$

➤ การแก้สมการของเลขยกกำลังและจำนวนที่ติดกรณฑ์

Ex 2.5 จงหาคำตอบของสมการ

1) $10x^{-2} - 11x^{-1} - 6 = 0$



$$2) 7x - 26\sqrt{x-8} = 0$$

$$3) 6x^{2/3} + 13x^{1/3} - 5 = 0$$

Ex 2.6 จงหาคำตอบของสมการ

1) $\sqrt{x^2 - 3x} = 2$

$$2) \sqrt{2x-1} - \sqrt{x-4} = 2$$

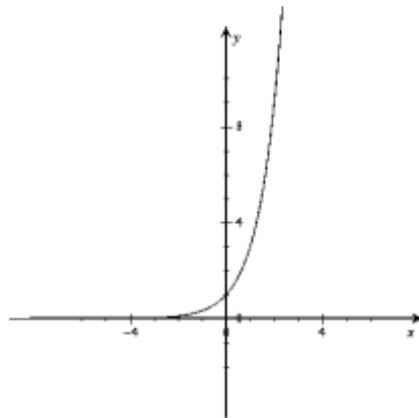
$$3) \sqrt{5x-4} - \sqrt{3x+1} = \sqrt{x-7}$$

3. ฟังก์ชันเอกซ์โปเนนเชียล (Exponential Function)

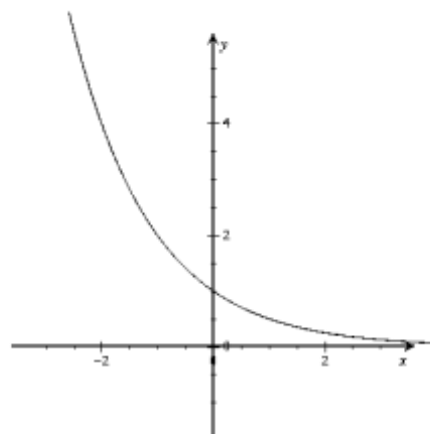
นิยาม: ฟังก์ชันเอกซ์โปเนนเชียล คือ $f = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ / y = a^x, a > 0, a \neq 1\}$

จากนิยามสรุปได้ ดังนี้

- 1) โดเมนของฟังก์ชันนี้คือ \mathbb{R}
- 2) เรนจ์ของฟังก์ชันนี้คือ \mathbb{R}^+
- 3) กราฟ $y = a^x$ จะผ่านจุด $(0,1)$ เสมอ
- 4) ถ้า $a > 1$ จะเป็นฟังก์ชันเพิ่ม เช่น $y = 3^x$ จะเป็นฟังก์ชันเพิ่ม มีลักษณะ ดังรูป



- 5) ถ้า $0 < a < 1$ จะเป็นฟังก์ชันลด เช่น $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ จะเป็นฟังก์ชันลด มีลักษณะดังรูป



➤ สมการและอสมการเอกซ์โปเนนเชียล

สมการเอกซ์โปเนนเชียล

Ex 3.1 จงหาคำตอบของสมการ

1) $4^x - 7 \cdot 2^x - 8 = 0$

2) $3^{x+2} + 3^{-x+1} = 28$

4. ฟังก์ชันลอการิทึม

นิยาม: ฟังก์ชันเอกซ์โปเนนเชียลอยู่ในรูป

$$f = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ / y = a^x, a > 0, a \neq 1\}$$

$$\text{ฟังก์ชันอินเวอร์สอยู่ในรูป } f^{-1} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} / x = a^y, a > 0, a \neq 1\}$$

ฟังก์ชันลอการิทึมเป็นฟังก์ชันอินเวอร์สของ ฟังก์ชันเอกซ์โปเนนเชียล

ฟังก์ชันลอการิทึมจะอยู่ในรูป $x = a^y$

$$\text{หรือ } y = \log_a x, x \in \mathbb{R}^+, y \in \mathbb{R}$$

ข้อสังเกต

- 1) กราฟของฟังก์ชัน $y = \log_a x, a > 0, a \neq 1$ จะผ่านจุด $(1,0)$ เสมอ
- 2) ถ้า $a > 1$ แล้ว $y = \log_a x$ เป็นฟังก์ชันเพิ่ม
- 3) ถ้า $0 < a < 1$ แล้ว $y = \log_a x$ เป็นฟังก์ชันลด
- 4) โดเมน คือ \mathbb{R}^+ , เรนจ์ คือ \mathbb{R}

Ex 4.1 จงเขียนเลขยกกำลังต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปลอการิทึม

1) $2^3 = 8$

2) $3^5 = 243$

Ex 4.2 จงหาค่าของ

1) ให้ $\log_4 64 = x$

2) ให้ $\log_5 \sqrt{125} = y$

3) ให้ $\log_{\frac{1}{3}} 81 = z$

คุณสมบัติที่สำคัญของลอการิทึม

1) $\log_a MN = \log_a M + \log_a N$

2) $\log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$

3) $\log_a M^y = y \log_a M$

4) $\log_a a = 1$

5) $\log_a 1 = 0$

6) $\log_N M = \frac{\log_a M}{\log_a N}$

7) $\log_a M = \frac{1}{\log_M a}$

8) $a^{\log_a M} = M$

9) $\log_{a^y} M^x = \frac{x}{y} \log_a M$

Ex 4.3 จงหาค่าของ $\log_2 64 - \log_3 81 + \log_5 \sqrt[3]{625}$

Ex 4.4 จงหาค่าของ $\log_2 80 - \log_2 35 + \log_2 28$

Ex 4.5 จงหาค่าของ $\log_9 8 \cdot \log_{10} 9 \cdot \log_{11} 10 \cdot \log_{12} 11 \cdot \log_{13} 12 \cdot \log_{14} 13 \cdot \log_{15} 14 \cdot \log_{16} 15$

Ex 4.6 จงหาค่าของ $\log_2 3 + \log_4 81 + \log_8 9 + \log_{\frac{1}{2}} 27$

Ex 4.7 จงหาค่าของ

1) $2^{\log_2 9 + \log_2 5} = 2^{\log_2 9 + \log_2 5}$

2) $81^{\log_2 \sqrt[4]{12} + \log_3 2}$

5. ลอการิทึมสามัญ

ลอการิทึมสามัญ หมายถึง ลอการิทึมที่มีฐานเป็น 10 การเขียนลอการิทึมสามัญจะเขียนโดยไม่
มีฐาน เช่น $\log_{10} N$ เขียนเป็น $\log N$

การหาค่า $\log N$ จะต้องเขียนในรูป

$$\begin{aligned}\log N &= \log(N_0 \times 10^n) \\ &= \log N_0 + \log 10^n \\ &= \log N_0 + n, \quad 1 \leq N_0 < 10\end{aligned}$$

เรียก $\log N_0$ ว่า แมนทิสซา (mantissa) ของ $\log N$ โดยที่ $\log N_0 \geq 0$

เรียก n ว่า แคแรกเทอร์ิสติกของ $\log N$ ซึ่ง $n \in \mathbb{I}$

Antilogarithm

ถ้า $\log 36.2 = 1.5587$

นั่นคือ 36.2 เป็น anti-logarithm ของ 1.5587

เขียนได้ว่า $36.2 = \text{antilog } 1.5587$

Ex 5.1 จงหาค่าลอการิทึมที่กำหนดให้ พร้อมทั้งหาค่าแคแรกเทอร์ิสติก และแมนทิสซา

(กำหนด $\log 3.62 = 0.6687$)

1) $\log 3620 = \log(3.62 \times 10^3)$

$$2) \log 36.2 = \log(3.62 \times 10)$$

$$3) \log 0.362 = \log(3.62 \times 10^{-1})$$

$$4) \log 0.0000362 = \log(3.62 \times 10^{-5})$$

Ex 5.2 จงหาค่าของ $\log 7254$

Ex 5.3 กำหนด $\log N = 5.9872$ จงหา N

Ex 5.4 กำหนด $\log N = -2.3926$ จงหา N

6. การประมาณค่าโดยใช้ลอการิทึม

การประมาณค่าโดยใช้ลอการิทึม เป็นการหาค่าประมาณที่ใกล้เคียงกับค่าที่แท้จริง

Ex 6.1 จงหาค่าของ $\sqrt[5]{826}$

Ex 6.2 จงหาค่าของ $\sqrt{\frac{3.24 \times 0.0125}{314}}$

7. สมการลอการิทึม

Ex 7.1 จงหาคำตอบของสมการ $\log_4 \log_2 \log_2 (x^2 - 3x) = 0$

Ex 7.2 จงหาคำตอบของสมการ $\log_8 (x-6) + \log_8 (x+6) = 1 + \log_8 (x-2)$

Ex 7.3 จงหาคำตอบของสมการ $(\log x)^4 - 3(\log x)^2 + 2 = 0$

Ex 7.4 จงหาคำตอบของสมการ $\log_2 x + \log_x 2 = \frac{5}{2}$

Ex 7.5 จงหาค่า x จากอสมการ $\log_5(3x-1) < 1$

Ex 7.6 จงหาค่า x จากอสมการ $\log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{2-3x}{x}\right) \geq -1$

Ex 7.7 จงหาค่า x จากอสมการ $\log_{\frac{1}{4}}(2-x) > \log_{\frac{1}{4}}\left(\frac{2}{x+1}\right)$

8. การใช้ลอการิทึมหาคำตอบของสมการเอกซ์โปเนนเชียล

สมการเอกซ์โปเนนเชียลบางสมการไม่สามารถหาคำตอบได้ จึงต้องใช้ลอการิทึมช่วยในการหาคำตอบของสมการ

Ex 8.1 จงหาคำตอบของสมการ $5^{2x-1} = 3^{4x+5}$

Ex 8.2 จงหาคำตอบของสมการ $3 \cdot 5^{2x-1} - 4 \cdot 5^{x+1} = -0.2$

Ex 8.3 จงหาคำตอบของสมการ $3^{x+2} \cdot 7^{y-1} = 3$... (1)

$$3^y \cdot 7^{x+1} = 7 \quad \dots (2)$$